EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….097**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze modulul vectorului $\vec{v} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$.

(4p) **b)** Să se calculeze distanța de la punctul $D(0,4,2)$ la planul $x + y + z + 4 = 0$.

(4p) **c)** Să se determine ecuația tangentei la cercul $x^2 + y^2 = 13$ în punctul $P(2,3)$.

(4p) **d)** Să se arate că punctele $L(1,2,3)$, $M(4,5,6)$ și $N(7,8,9)$ sunt coliniare.

(2p) **e)** Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(-1,1)$, $B(-2,2)$, $C(3,3)$.

(2p) **f)** Să se determine $a \in \mathbf{R}$, astfel încât vectorii $\vec{v} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$ și $\vec{w} = 3\vec{i} + a\vec{j}$ să fie perpendiculari.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

(3p) **b)** Să se calculeze probabilitatea ca un element $\hat{x} \in \mathbf{Z_6}$ să verifice relația $\hat{x}^2 + \hat{x} = \hat{2}$.

(3p) **c)** Să se calculeze matricea $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{2007}$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x^2 + 7) = \log_2(5x^2 + x + 2)$.

(3p) **e)** Să se calculeze inversa matricei $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x - \sin x$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f'(x)dx$.

(3p) **c)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_0^1 \frac{x}{5x^2 + 6}dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră mulțimea $G=\left\{ f_n \in \mathbf{R}[X] \mid f_n = 1+X+X^2+\ldots+X^n,\ n\in\mathbf{N} \right\}$ şi polinoamele

$g=(1+X+X^2)(1+X^3)$, $h=(1+X)(1+X^2)(1+X^4)$, $g_n=(1+X+X^2+\ldots+X^n)(1+X^{n+1})$

şi $h_n=(1+X)(1+X^2)(1+X^4)\cdot\ldots\cdot\left(1+X^{2^n}\right)$, $\forall n\in\mathbf{N}$.

(4p) **a)** Să se arate că $g\in G$ şi $h\in G$.

(4p) **b)** Să se calculeze $h(0)-g(0)$.

(4p) **c)** Să se arate că polinoamele g şi h au o rădăcină reală comună.

(2p) **d)** Să se determine restul împărțirii polinomului h la polinomul g.

(2p) **e)** Să se arate că $g_n\in G$ şi $h_n\in G$, $\forall n\in\mathbf{N}$.

(2p) **f)** Să se determine $n\in\mathbf{N}$ pentru care $h_n=g_n$.

(2p) **g)** Să se arate că pentru orice $n\in\mathbf{N}$, $n\ge 2$, câtul împărțirii polinomului h_n-g_n la polinomul X^{2n+2} este un polinom din mulțimea G.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f:[0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^{\alpha}-\alpha\cdot x$, unde $\alpha\in(0,1)$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x>0$.

(4p) **b)** Să se arate că $f'(x)>0$, $\forall x\in(0,1)$ şi $f'(x)<0$, $\forall x\in(1,\infty)$.

(4p) **c)** Să se deducă inegalitatea $x^{\alpha}-\alpha\cdot x\le 1-\alpha$, $\forall x>0$.

(2p) **d)** Alegând $x=\dfrac{a}{b}$, cu $a,b>0$ şi notând $\beta=1-\alpha$, să se arate că $a^{\alpha}b^{\beta}\le\alpha a+\beta b$, $\forall a,b>0$ şi $\forall\alpha,\beta>0$ cu $\alpha+\beta=1$.

(2p) **e)** Să se arate că $st\le\dfrac{s^p}{p}+\dfrac{t^q}{q}$, $\forall s,t>0$ şi $\forall p,q>1$ cu $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

(2p) **f)** Utilizând inegalitatea de la punctul **e)**, să se arate că, dacă $a_1,\ldots,a_n$ şi $b_1,\ldots,b_n$ sunt numere reale strict pozitive, $p,q>1$ cu $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, atunci

$$a_1b_1+\ldots+a_nb_n\le\left(a_1{}^p+\ldots+a_n{}^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(b_1{}^q+\ldots+b_n{}^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

(2p) **g)** Să se demonstreze că, dacă $h,g:[0,1]\to(0,\infty)$ sunt două funcții continue şi $p,q>1$ cu $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, atunci $\displaystyle\int_0^1 h(x)g(x)dx\le\left(\int_0^1 h^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 g^q(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}$.